Senatsverwaltung für Bildung, Wissenschaft und Forschung
Landesinstitut für Schule und Medien

Berlin

19.01.2007

Fachbrief Nr. 6
Mathematik

1. **Auswertung des Probeabiturs**
2. **Hinweise zum Zentralabitur**
3. **Musterlösung**
4. **Taschenrechner im Abitur**
5. **PISA Längsschnittuntersuchung**

Sehr geehrte Kolleginnen und Kollegen,

das Probeabitur liegt hinter uns, das erste Zentralabitur rückt näher, so dass auch dieser Fachbrief wieder ein wenig „Sek-II-lastig" geraten ist, aber auch andere Themen berührt. Ich habe versucht, mich auf die wesentlichen Informationen zu beschränken. Im Anhang finden Sie eine Übersicht über die bisherigen Fachbriefe Mathematik.

Ich bitte die Fachverantwortlichen der Schulen, den Fachbrief den unterrichtenden Kolleginnen und Kollegen zur Verfügung zu stellen. Er wird unter der Internetadresse der — im Zuge der Neubildung des Senats umbenannten — Senatsverwaltung unter http://www.berlin.de/sen/bwf/ (oder gleich direkt http://www.bwfinfo.verwalt-berlin.de/index.aspx, BWF-Info|Schule|Fachbriefe) veröffentlicht.

Mit freundlichen Grüßen

Christian Bänsch

Senatsverwaltung für Bildung, Wissenschaft und Forschung, ID 7
Beuthstraße 6 — 8, 10117 Berlin
christian.baensch@senbwf.verwalt-berlin.de

Ihre Ansprechpartnerin im gemeinsamen LISUM Berlin/Brandenburg:
angelika.reiss@lisum.verwalt-berlin.de

1. Auswertung des Probeabiturs

Am 25.10.2006 fand ein „Probeabitur" für das erste Zentralabitur in Berlin statt. Es diente der Erprobung der Durchführung für alle Beteiligten. Für die nachfolgenden Jahrgänge ist kein Probeabitur mehr vorgesehen. Ich bedanke mich bei allen Lehrkräften, die die Mühe der Rückmeldung auf sich genommen und in vielerlei Formen schriftliche Kommentare abgegeben haben. Die Ergebnisse und die Konsequenzen für das Zentralabitur wurden auf mehreren Sitzungen erörtert. Ich bin sehr froh, dass es das Probeabitur gegeben hat, weil sich Erkenntnisse ergaben, die im Zentralabitur 2007 noch berücksichtigt werden können. Alle schriftlichen Rückmeldungen sowie die ausführliche Auswertung der Onlineabfrage wurden dem Entwicklerteam zur Verfügung gestellt und die nötigen Konsequenzen dort diskutiert.

Wichtige Konsequenzen sind:

- Die Aufgaben werden für alle Schülerinnen und Schüler gedruckt, so dass für die Schulen der Kopieraufwand (bis auf Ausnahmefälle) entfällt.
- Die Erwartungshorizonte werden ausführlicher abgefasst.
- Es werden zusätzliche Sicherheitsschienen zur Fehlervermeidung eingeführt.
- Die nichtgewählten Aufgaben müssen zwar wie in allen anderen Fächern während der Bearbeitungszeit eingesammelt werden, aber erst nach 90 Minuten.

A. Auswertung der Online-Abfrage

Ich fasse hier lediglich die Ergebnisse zusammen, ohne die vielen Einzeldaten aufzuführen.

1. Teilnehmende Schulen

Gymnasium 80, Gesamtschule 25, Privatschule 7, OSZ 11, Gesamt 123

2. Aufgabenauswahl durch die Schüler/innen (im GK 2 aus 4, im LK 3 aus 5)

Die Aufgaben aus dem 3. Semester wurden klar bevorzugt.

3. Einschätzung der Lehrkräfte

a) Passte die Themenstellung der Aufgaben zum Vorunterricht?

b) Schwierigkeitsgrad der Aufgaben

Hier ist die Passung offenbar weitgehend gelungen, bis auf GK A4, LK A5 (Stochastik) und LK A1. Die Stochastik ist als Sachgebiet neu im schriftlichen Abitur, deswegen sind unterschiedliche Vorstellungen darüber nicht verwunderlich. Umso wichtiger ist es, dass das Thema im Probeabitur berücksichtigt wurde. Aus den schriftlichen Rückmeldungen geht hervor, dass bei LK A1 die Kritik an Teilaufgaben auf die gesamte Aufgabe übertragen wird.

c) Entsprachen die im EH formulierten Teilleistungen den Einschätzungen der Kurslehrkräfte?

Hier zeigt sich Kritik an den Formulierungen des EH, insb. bei GK A2, A4 und LK A2, A5, die vom Entwicklerteam für das Zentralabitur berücksichtigt werden.

d) Entsprachen die BE-Zuweisungen den Einschätzungen der Kursleiter/innen?

Hier wird die z. T. berechtigte Detailkritik den ganzen Aufgaben angelastet, GK insgesamt und LK insb. A2 und A3. Hier ist der Zeitdruck für das Entwicklerteam zu erwähnen; im Zentralabitur wird noch mehr Sorgfalt an die BE-Verteilung angelegt werden.

4. Wie viele Schüler/innen haben welche Note erreicht?

(Für den Grundkursbereich wurden nur berücksichtigt, wer Mathematik als 3. PF gewählt hat.)

	Grundkurs					Leistungskurs				
Schulform	Gy	GS	Priv.	OSZ	**Summe**	Gy	GS	Priv.	OSZ	**Summe**
Teilnehmerzahl	1114	227	63	120	**1524**	1195	306	50	143	**1694**
Durchschnittsnote	2,85	3,52	3,05	3,77	**3,04**	2,45	3,27	2,38	3,61	**2,69**

Der Schnitt und auch die Notenverteilung sind vergleichsweise gut, so dass sich gelegentliche Kritik am Schwierigkeitsgrad relativiert. Bemerkenswert sind die Unterschiede zwischen den Schulformen: Wegen der relativ geringen Anzahlen darf man diese Daten jedoch nicht überbewerten.

B. Zusammenfassung der schriftlichen Kommentare

Als in der Gesamtschau bedeutsam lassen sich folgende Punkte anführen (z. T. kommentiert):

1. Die Entscheidung, ein Probeabitur anzubieten, war richtig. Ein Gutteil der Sorgen und Unsicherheiten von Lernenden und Lehrenden konnte genommen bzw. gemildert werden. Es erfolgten viele kritische, aber auch viele positive Rückmeldungen.
2. Der frühe Zeitpunkt im 3. Semester beeinflusst das Ergebnis wegen der mathematiktypischen starken Inhaltsabhängigkeit der zu prüfenden Kompetenzen. Eine Projektion auf das Zentralabitur 2007 ist nur mit Einschränkungen möglich.
3. Die Aufgaben waren inhaltlich fehlerfrei. Die Fehler im EH waren ärgerlich. Die knappe Entwicklungszeit blieb hier leider nicht ohne Auswirkung.
4. Die Arbeitsbögen (Koordinatensysteme) waren nicht sorgfältig genug gestaltet.
5. Die Grundkursaufgaben wurden mehrfach als noch etwas zu umfangreich angesehen.
6. Im Leistungskurs sollten mehr Anwendungsbezüge vorkommen.
7. Die Zuweisung der Bewertungseinheiten (BE) war nicht immer konsistent und nicht immer präzise genug auf den Zeitaufwand bezogen.
8. Die inhaltliche Passung an die Vorgaben war nicht vollständig nachvollziehbar. Hier gab es unterschiedliche Erwartungen wegen des frühen Zeitpunkts (Ein Parameter macht aber noch keine Ebenenschar). Dieses Problem kann im Zentralabitur so nicht auftreten.
9. Die Aufgaben zum 3. Semester beinhalteten ähnliche Anforderungen wegen des frühen Zeitpunktes. Die Inhalte des 3. Semesters haben keinen Vorlauf im 1. Kursjahr.
10. Eine detailliertere BE-Verteilung wird gewünscht. Die BE-Verteilung entspricht aber den Beispielaufgaben der EPA, der Tradition des dezentralen Abiturs und lässt Spielraum zur Berücksichtigung des Vorunterrichts. Davon werde ich nicht abgehen. Eine vollständig normierte, einheitliche Bewertung ist weder wünschenswert noch möglich.
11. LK A2e zu hoch bepunktet (kürzer lösbar, vgl. Bigalke/Köhler LK 13.1, S. 87).
12. Der Umfang und die Qualität der erwarteten textlichen Kommentierung der Lösungen sollte klarer geregelt werden.

C. Schlussfolgerungen für das Zentralabitur 2007

1. Sämtliche Rückmeldungen wurden dem Entwicklerteam zur Verfügung gestellt, damit sie für das Zentralabiturs 2007 noch berücksichtigt werden können.
2. Die im Fachbrief Nr. 4 veröffentlichte Operatorenliste zur eindeutigen Formulierung der Arbeitsaufträge in den Aufgaben wird bei den Aufgaben besser eingehalten.
3. Der Umfang der Arbeit soll im Grundkursbereich noch überprüft werden.
4. Auch bei den LK-Aufgaben sollten Anwendungsbezüge berücksichtigt werden.
5. Offene Aufgabenteile, insb. mit Fragen nach Erläuterungen, Begründungen und Bewertungen sollen zunehmend vorkommen.
6. Die Erwartungshorizonte werden um mehr Zwischenergebnisse ergänzt. Es müssen alle erwarteten Zeichnungen aufgenommen werden.
7. Die Gestaltung der Arbeitsbögen (Koordinatensysteme) wird verbessert.
8. Die Zuordnung der BE soll so weit wie möglich gemäß einer im Aufbau befindlichen „Bausteinliste" des Entwicklerteams erfolgen, um unterschiedliche BE-Zuweisungen zu gleichen Teilleistungen in verschiedenen Aufgaben weitestgehend zu vermeiden.
9. Die Zeit zwischen Fertigstellung der Aufgaben und dem Druck wird für Kontrollrechnungen genutzt, um Schreib- und Rechenfehler in den EH so weit wie möglich auszuschließen.
10. Die Aufgaben werden für jeden Teilnehmer gedruckt, so dass in den Schulen nur im Ausnahmefall kopiert werden muss.
11. Die nicht gewählten Aufgaben werden nicht schon nach 30 Minuten eingesammelt, so dass der Auswahlprozess durch die Kandidaten in einem etwas größeren Rahmen selbständig strukturiert werden kann.

2. Hinweise zum Zentralabitur 2007 und 2008

Die Grundlage für die ersten beiden Durchgänge des Zentralabitur sind die Curricularen Vorgaben (CV). Wegen der im Vergleich zu den anderen Semestern geringeren zur Verfügung stehenden Unterrichtszeit erinnere ich an und präzisiere einige der inhaltlichen Vorgaben (vgl. RS I Nr. 46/2005, Anlage Mathematik):

Es **entfallen** im Zentralabitur 2007 und 2008 u. a.

- Im **Grundkurs** die Stochastik im ma-4 sowie Erwartungswert und Standardabweichung bei der Binomialverteilung (letzter Spiegelpunkt Curriculare Vorgaben S. 30 ma-2 Stochastik),
- im **Leistungskurs** die Stochastik II.2 und III aus MA-4, aus MA-2 Differenzialgleichungen (des natürlichen, des beschränkten und des logistischen Wachstums) sowie zusätzlich die Integration gebrochen rationaler Funktionen mittels Partialbruchzerlegung (aus Integralrechnung II.2).
- im **Leistungskurs** findet die Axiomatik des Vektorraums keine Berücksichtigung; nur die Begriffe linear abhängig und linear unabhängig können im LK vorkommen.

3. Musterlösung einer Abituraufgabe

Auf vielfachen Wunsch hin veröffentliche ich hier eine Aufgabe mit Musterlösung, um Ihnen Anhaltspunkte zu den Anforderungen an die textliche Begleitung der Lösung zu geben. Die Erarbeitung erfolgte durch das Entwicklerteam für das Zentralabitur, das sich für dieses Beispielaufgabe bewusst für eine sehr traditionelle und damit allen Kollegen vertraute Aufgabenstruktur entschieden hat. Auch diese Musterlösung wird nicht alle Fragen zur Bewertung der integrierten textlichen Gestaltung beantworten und wahrscheinlich auch wieder neue aufwerfen.

Aufgabe (veränderte Aufgabe Nr. 5 der Musteraufgaben)

Bearbeiten Sie die Aufgabenteile. Beschreiben Sie dabei Ihre Vorgehensweise und kommentieren Sie Ihre Lösungen. Die Qualität der textlichen Begleitung wird mitbewertet.

Logarithmusfunktion

Gegeben ist eine Funktion f mit $f(x) = \ln(3+x) - \ln(3-x)$.

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich von f.

b) Weisen Sie nach, dass der Graph von f punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung ist. Untersuchen Sie f auf Nullstellen sowie G_f auf Extrem- und Wendepunkte.
Bei Wendepunkten genügt die Untersuchung der notwendigen Bedingung.
Zur Kontrolle Ihrer eigenen Berechnung von f '' . $f''(x) = \frac{-1}{(3+x)^2} + \frac{1}{(3-x)^2}$.

c) Gegeben ist eine weitere Funktion g mit $g(x) = \ln(3-x)$. Zeichnen Sie die Graphen von f und g in ein Koordinatensystem mithilfe einer Wertetabelle und geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der beiden Graphen an.
Hinweis: Später benötigen Sie für Aufgabenteil e) die y-Achse im Intervall $-4 < y < 4$.

d) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt (1| f(1)).
Zur Kontrolle Ihrer eigenen Rechnung: $t(x) = \frac{3}{4}x + \ln(2) - \frac{3}{4}$.

e) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden h, die zu dieser Tangente senkrecht verlaufen und mit den beiden Koordinatenachsen ein Dreieck mit dem Inhalt 6 Flächeneinheiten einschließen, und ergänzen Sie Ihre Zeichnung durch die Graphen von t und h.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile						
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	2	13	10	5	5	35

Hinweise zu dem Beispiel einer möglichen Lösung durch den Prüfling

- Der in diesem Lösungsbeispiel knapp bemessene Text würde — aus der Sicht des Entwicklerteams und der Fachaufsicht — für eine Schülerlösung als noch angemessen beurteilt.
- Die beiden in Klammern gesetzten Textsegmente sind zwar Bestandteil einer mathematisch vollständigen Formulierung, werden jedoch von Prüflingen im Grundkurs häufig nicht zu erwarten sein und führen bei Weglassen — ebenso wie das weitgehende Fehlen der Operationen bei Gleichungsumformungen — nicht zu BE-Abzügen.
- Die Verwendung von logischen Zeichen kann nur mit Bezug auf den durchgeführten Unterricht beurteilt werden. Wird z. B. das Äquivalenzzeichen „$\Leftrightarrow$“ nicht verwendet, so führt dies nicht zu BE-Abzügen.
- Die Zeichnungen des Prüflings dürfen nicht in der Genauigkeit der hier verwendeten (und verkleinerten) Ausdrucke erwartet werden.
- Aufgabenteil e) wird dem Anforderungsbereich III zugeordnet. Für diese 5 BE gilt die Zeitproportionalität nur eingeschränkt. Die Zeichnung wird natürlich nicht doppelt angefertigt, sondern lediglich ergänzt und entsprechend beschriftet.
- Die hier vorgestellte Lösung würden alle erreichbaren 35 BE erhalten, auch in dem Wissen, dass sprachlich besser ausgearbeitete Lösungen möglich sind.

Mögliche Lösung durch den Prüfling

a) Logarithmusfunktionen sind nur für positive Argumente definiert, darum muss gelten:
$3+x>0 \;\wedge\; 3-x>0$ bzw. $x>-3 \wedge x<3$; $D_f = \,]-3; 3\,[$.

b) Der Graph von f ist punktsymmetrisch (zum Koordinatenursprung), wenn für alle $x \in D_f$ gilt:
$f(-x) = -f(x)$:

$$\begin{aligned}
& f(-x) = \ln(3+(-x)) - \ln(3-(-x)) \\
\Leftrightarrow\quad & f(-x) = \ln(3-x) - \ln(3+x) \\
\Leftrightarrow\quad & f(-x) = -\ln(3+x) + \ln(3-x) \\
\Leftrightarrow\quad & f(-x) = -(\ln(3+x) - \ln(3-x)) = -f(x)\,.
\end{aligned}$$

Die (notwendige und hinreichende) Bedingung für Nullstellen lautet $f(x) = 0$:

$$\begin{aligned}
& \ln(3+x) - \ln(3-x) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \ln(3+x) = \ln(3-x) \\
\Leftrightarrow\quad & e^{\ln(3+x)} = e^{\ln(3-x)} \\
\Leftrightarrow\quad & 3+x = 3-x \\
\Leftrightarrow\quad & 2x = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & x = 0
\end{aligned}$$

Es kann nur relative Extrempunkte geben, wenn die erste Ableitung an einer Stelle null wird. Darum wird die Gleichung $f'(x) = 0$ auf Lösungen untersucht.

$$f'(x) = \frac{1}{3+x} - \frac{1}{3-x} \cdot (-1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{3+x} + \frac{1}{3-x}$$

$$\begin{aligned}
f'(x) = 0:\quad & 0 = \frac{1}{3+x} + \frac{1}{3-x} \qquad \Big| \cdot (3+x)(3-x) \\
\Leftrightarrow\quad & 0 = 3 - x + (3+x) \\
\Leftrightarrow\quad & 0 = 6
\end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch, also kann der Graph von f keine relativen Extrempunkte besitzen.

Untersuchung des Graphen von f auf Wendepunkte:
Die notwendige Bedingung für Wendestellen ist $f''(x)=0$.

$$f''(x)=\frac{-1}{(3+x)^2}+\frac{-1\cdot(-1)}{(3-x)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-1}{(3+x)^2}+\frac{1}{(3-x)^2}$$

$f''(x)=0$: $$0=\frac{-1}{(3+x)^2}+\frac{1}{(3-x)^2} \qquad |\cdot(3+x)^2\cdot(3-x)^2$$

$$0=-1\cdot(3-x)^2+(3+x)^2$$

$$\Leftrightarrow\quad 0=-9+6x-x^2+9+6x+x^2$$

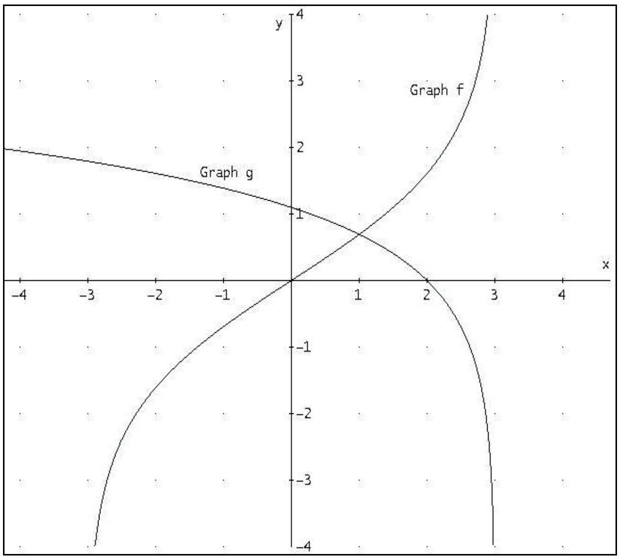
$$\Leftrightarrow\quad 0=12x$$

$$\Leftrightarrow\quad x=0$$

$f(0)=0$, Wendepunkt: $W(0\,|\,0)$

c) Wertetabelle:

x	0	1	2	3	-1	-2	-3	-4	-5
f(x)	0	0,7	1,6	-	-0,7	-1,6	-	-	-
g(x)	1,1	0,7	0	-	1,4	1,6	1,8	1,9	2,1



Schnittpunkt der beiden Graphen: Durch die Wertetabelle erkennt man, dass $f(1)=\ln 4-\ln 2=g(1)=\ln 2\approx 0{,}7$ gilt. Der Schnittpunkt der beiden Graphen liegt bei $S(1\,|\ln 2)$.

d) Ansatz für die Tangentengleichung: $t(x)=mx+n$

Bedingungen: (I) $m=f'(1)$

(II) $t(1)=\ln 2$

(I) $m=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

Einsetzen in (II): $\ln 2=\frac{3}{4}\cdot 1+n$

$$\Leftrightarrow\quad \ln 2-\frac{3}{4}=n$$

$$t(x)=\frac{3}{4}x+\ln(2)-\frac{3}{4}$$

e) Die Gerade h verläuft senkrecht zu t, wenn $m_h \cdot m_t = -1$ erfüllt ist.

$$m_h \cdot \frac{3}{4} = -1 \;\Leftrightarrow\; m_h = -\frac{4}{3}$$

$$h(x) = -\frac{4}{3}x + n_h$$

Der Inhalt A des Dreiecks wird durch die Nullstelle x_0 von h und durch n_h bestimmt:

$$A = \frac{1}{2} \cdot x_0 \cdot n_h$$

$$\frac{1}{2} \cdot x_0 \cdot n_h = 6 \quad \text{(I)}$$

Für x_0 gilt: $-\frac{4}{3}x_0 + n_h = 0$. (II)

Damit gibt es zwei Gleichungen mit zwei Variablen, für die eine Lösung gesucht wird:

(I): $x_0 = \frac{12}{n_h}$

Einsetzen von x_0 in (II): $-\frac{4}{3} \cdot \frac{12}{n_h} + n_h = 0$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{16}{n_h} + n_h = 0 \quad \left| + \frac{16}{n_h}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad n_h = \frac{16}{n_h} \quad | \cdot n_h$$

$$\Leftrightarrow \quad n_h^2 = 16$$

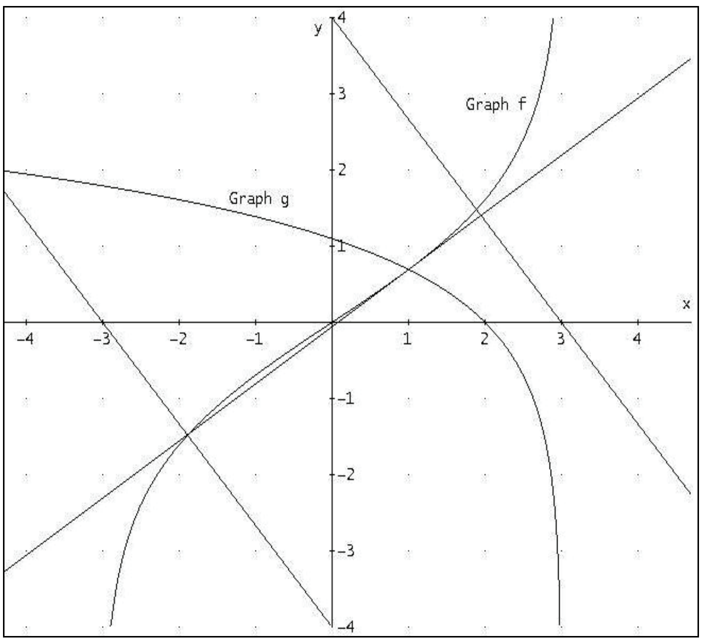
$$\Leftrightarrow \quad n_h = \pm 4$$

Einsetzen in I: $x_0 = \pm 3$

Das Gleichungssystem hat zwei Lösungen; es gibt zwei Geraden, die beide Bedingungen erfüllen.

Die Gleichungen sind $y = -\frac{4}{3}x + 4$ und $y = -\frac{4}{3}x - 4$.

Ergänzung der Zeichnung aus c):



4. Taschenrechner im Abitur

Aufgrund vieler Anfragen zu einzelnen Geräten habe ich die Anregung aufgegriffen, eine Liste wissenschaftlicher Taschenrechner zu erstellen. Ich habe dafür aktuelle Produktübersichten der wichtigsten Hersteller und die Beschreibungen unter www.taschenrechner.de genutzt. Aufgeführt sind alle mir bekannten, in Frage kommenden Produkte. Diejenigen, die den in den Vorgaben zum Zentralabitur genannten Kriterien genügen, haben ein Kreuz in der Ja-Spalte der Tabelle und sind im Zentralabitur als Hilfsmittel zugelassen.

Diese Kriterien bleiben mindestens bis einschließlich 2009 gültig: nichtgrafikfähig, nicht programmierbar, kein Gleichungslöser, keine Berechnung von Integral- und Ableitungswerten.

Im unteren Preissegment gibt es vergleichbare No-name-Produkte, die hier nicht aufgeführt, aber ggf. zugelassen sind.

Der Vollständigkeit halber füge ich eine Übersicht über die Geräte (Taschencomputer — TC) bei, die für (und nur für) das CAS-Abitur einsetzbar sind.

Produkt	Ja	Nein
Casio		
FX-82 Serie	X	
FX-83 Solar	X	
FX-85 MS/ES	X	
FX-115 MS		X
FX-350 MS/ES	X	
FX-820 MS	X	
FX-991 ES		X
FX-992 S	X	
FX-3650 P		X
FX-4500 PA		X
FX-4800 P		X
FX-5500 LA		X
Sharp		
EL-500 W	X	
EL-506 W		X
EL-520 WG	X	
EL-531 WG	X	
EL-531 WH	X	
EL-546 R		X
EL-5120		X

Produkt	Ja	Nein
Texas Instruments		
TI-30-Serie	X	
TI-34	X	
TI-36	X	
Hewlett-Packard		
HP-9 S	X	
HP-30 S	X	

Für das CAS-Abitur zugelassene Geräte:

Produkt	ja
Casio Algebra FX 2.0 Plus	X
Casio FX 9860 G	X
Casio Classpad 300 Plus	X
Sharp EL-9650	X
Sharp EL-9900	X
TI-83 Plus	X
TI-89 Titanium	X
TI-92	X
TI-Voyage	X
TI-Nspire	X
HP 50 G	X

5. PISA-Längsschnittuntersuchung[1]

Ich gebe Ihnen hier meine kurze, unkommentierte Zusammenfassung der 2006 veröffentlichten Mathematik-Ergebnisse der interessanten Längsschnittuntersuchung aus 2004, die PISA-2003 ergänzte. Diese Folgestudie wurde in der Öffentlichkeit weit weniger beachtet als die PISA-Ergebnisse 2003. Sie ist meiner Meinung nach aber von Bedeutung, weil sie zum ersten Mal nicht nur eine Momentaufnahme zeigt, sondern dieselbe Testpopulation ein Jahr später erneut auf Kompetenzzuwachs hin untersucht. Und es ist immer ein Unterschied, ob man etwas zwar für klar oder allgemein bekannt hält, aber letztlich nur vermutet oder aber es belegen kann.

Die Querschnittsuntersuchung PISA 2003 wurde nicht nur durch einen stärker curricular ausgerichteten, nationalen Ergänzungstest (PISA-E) erweitert, sondern auch durch eine Längsschnittkomponente ergänzt, bei der 9. Klassen aus 2003 in 2004 als 10. Klassen erneut getestet wurden. Es waren jedoch keine Hauptschulen dabei, weil in vielen Bundesländern diese Schülerinnen und Schüler die Schule bereits verlassen hatten. Die Stichprobe umfasste deutschlandweit ca. 6.000 Jugendliche aus 275 9. bzw. in 2004 dann 10. Klassen.

Die Zielstellungen waren:
- Beschreibung der Entwicklung mathematischer und naturwissenschaftlicher Kompetenzen
- Identifizierung von Bedingungsfaktoren (Elternhaus, Unterricht, Schule), die die Kompetenzentwicklung beeinflussen

Eingesetzt wurden Mathematikaufgaben aus dem internationalen und dem nationalen Test sowie neue Aufgaben bezogen auf Inhalte der 10. Jahrgangsstufe, eine Kurzform des naturwissenschaftlichen Tests 2003 und Fragen zu Lerngewohnheiten, sozialem Umfeld (auch an Eltern)

Die PISA-Konzeption misst der mathematischen Kompetenz eine Schlüsselstellung für die kulturelle Teilhabe und die gesellschaftliche Entwicklung zu. Im Mittelpunkt steht die Bedeutung der Mathematik für das Leben.

Der Kompetenzzuwachs innerhalb eines Jahres betrug beim Grundbildungstest (mathematical literacy gemäß PISA) im Mittel 25, beim curricular orientierten Test 27 Punkte mit sehr starker Korrelation beider Teile. 60 % der Jugendlichen verbesserten sich deutlich, 1/3 stagnierte, 8 % verschlechterten sich deutlich. Das stagnierende Drittel verteilte sich etwa gleich über alle Kompetenzniveaus. 40 % haben nichts dazugelernt.

Innerhalb der beteiligten Klassen verteilten sich die Unterschiede in der Leistungsentwicklung, so dass 89 % der Klassen ihre Leistungen deutlich verbesserten. In 11 % der Klassen konnten die Schüler/innen offenbar nicht vom Mathematikunterricht (MU) profitieren.

Die Schule hat das Bildungsmonopol in Mathematik. Der MU in Deutschland ist lehrergeleitet und variationsarm. Neue didaktisch-methodische Ansätze (Kontextorientierung, Sinus, moderne Methoden, individuelle Förderung) sind die Ausnahme. Offenbar könnten Umsteuerung in der Unterrichtskultur und individuelle Förderung helfen. Vom Unterricht profitiert immer nur eine Teilgruppe. Mathematische Inhalte müssen noch mehr mit Anwendungen (Lebensweltbezug) verknüpft werden.

Die Jungen sind trotz der festgestellten gravierenden Defizite in der Lesekompetenz (-34 Punkte gegenüber den Mädchen) zwar besser in Mathematik, sie werden aber nicht besser bewertet. Die Unterschiede der Geschlechter in Selbstwirksamkeit, Selbstkonzept, Angst und Interesse lassen sich nicht auf die Bewertung zurückführen. Das Geschlecht der Lehrkraft und der Mädchenanteil in der Klasse sind irrelevant. Höheres Interesse bei den Jungen oder mehr kontextbezogener Unterricht für die Mädchen korrelieren nicht mit dem Kompetenzzuwachs.

[1] Quelle: PISA 2003, Untersuchungen zur Kompetenzentwicklung im Verlauf eines Schuljahres, Prenzel et. al., PISA-Konsortium Deutschland, Waxman Verlag GmbH 2006

Das Desinteresse der Mädchen könnte daran liegen, dass Interesse an Mathematik und Naturwissenschaft in der sozialen Bezugsgruppe mit geringerer Beliebtheit und weniger Weiblichkeit assoziiert wird. Da könnte nur eine Imageverbesserung der MINT-Fächer Abhilfe schaffen.

Die beträchtlichen Kompetenzunterschiede zwischen den sozialen Gruppen (dH/ndH) bleiben von 9 nach 10 bestehen. Häusliche Unterstützung hilft auch bei dieser Altersgruppe unabhängig von strukturellen Herkunftsmerkmalen (sozioökonomischer Status, Bildungsabschluss der Eltern, Migrationshintergrund) und anderen familiären Prozessmerkmalen (lernrelevante Besitztümer, kulturelle Aktivitäten, fachbezogene Einstellung) deutlich bei der Kompetenzentwicklung.

Im deutschen MU ist das Ablaufprinzip („Stundenfigur") Hausaufgabenbesprechung — Wiederholung der vergangenen Stunde — fragend-entwickelndes Unterrichtsgespräch, Erarbeitung des Neuen — Übern in Stillarbeit ist methodische Monokultur. Kleinschrittigkeit bietet aber wenig kognitive Herausforderung, die Kalkülorientierung drängt begriffliches Verständnis und Modellierung zu sehr in den Hintergrund. Das Potenzial von Aufgaben wird verschenkt durch die vorherrschende Kleinschrittigkeit der Abarbeitung von einzelnen Lösungsschritten. Moderne Unterrichtsprinzipien sind wenig verbreitet oder sogar unbekannt:

Das Unterrichtsgespräch überwiegt anstelle von materialgestütztem Arbeiten oder Gruppenarbeit. Die so überaus verbreitete Stillarbeit wird nicht für Individualisierung genutzt, sondern alle machen dasselbe, nur jeder für sich.

Die drei PISA-Aufgabentypen in eingesammelten Klassenarbeiten:

- technisch	(kontextfrei)	49 %
- rechnerische Modellierung	(prozedural)	43 %
- begriffliche Modellierung	(konzeptuell)	8 %

innermathematisches Modellieren nicht erforderlich	68 %
mathematisches Argumentieren nicht erforderlich	96 %

Die Aufgaben eröffnen nur in geringem Maße Potenzial zur kognitiven Herausforderung mit dem Untersuchungsgegenstand. Rein technische Aufgaben dominieren, selbst wenn in RLP explizit etwas anderes gefordert wird.

Die untersuchten Unterrichtsmerkmale Klassenführung, kognitive Aktivierung und konstruktive Unterstützung zeigen positive Auswirkung auf die mathematischen Kompetenzen.

Komplexere Inhalte machen in Kl. 10 elaborierteres Lernen und verständnisorientiertere Lernstrategien erforderlich, das Memorieren von Algorithmen führt seltener zum Erfolg als noch in Kl. 9. Jugendliche, die glauben, dass Mathematik für ihre Zukunft wichtig sei, erreichen höhere Kompetenzzuwächse als solche, die sich nur am sozialen Leistungsvergleich (Vergleich mit den Klassenkameraden oder der Peergroup) orientieren.

Schülerleistungen hängen in weitaus höherem Maße von der Lehrkraft ab als von Schulmerkmalen. Relevante Untersuchungsmerkmale waren bei den Lehrkräften
- Kooperationspraxis im Unterricht und mit den Eltern,
- Evaluationspraxis,
- disziplinäres/soziales Unterrichtsklima,
- effektive Zeitnutzung,
- Fortbildungsbereitschaft und
- Leistungsorientierung.

Sie beeinflussen den Kompetenzzuwachs signifikant.

In Deutschland wird das kognitive Potenzial noch nicht immer angemessen in domänenspezifische Kompetenzen umgesetzt. Die Problemlösekompetenz in 9 korreliert nur gering zum Zuwachs der Fachkompetenz bis zum Ende von 10. Sie ist, anders als Fachkompetenz, auch das Ergebnis außerschulischer Lernprozesse. Die Unterschiede sind bei Personen geringer Fachkompetenz besonders ausgeprägt.

Anhang:

Übersicht über die bisherigen Fachbriefe Mathematik

Fachbrief 1 vom 06.12.2004

- Antworten der Rahmenlehrplankommission auf häufig gestellte Fragen zu den curricularen Vorgaben
- Information zur ersten zentralen, schriftlichen Abiturprüfung 2006/07

Fachbrief 2 vom 18.08.2005

- Musteraufgaben für das Zentralabitur

Fachbrief 3 vom 10.11.2005

- Was ist neu am neuen RLP Sek. I?
- Der erste MSA 2006

Fachbrief 4 vom 04.05.2006

- Der zweite mittlere Schulabschluss 2007
- „Probeabitur" im Oktober 2006
- Operatorenliste
- Was ist neu im 11. Jahrgang (E-Phase) ab 2006?
- CAS-Einsatz
- Taschenrechner im Zentralabitur

Fachbrief 5 vom 09.10.2006

- Übergangsregelungen bei der Einführung des neuen RLP Sek. I
- MSA 2007
- Einführungsphase
- Zentralabitur, neue Fachanlage 3a zur neuen AV Prüfungen
- Hilfsmittel im Abitur
- CAS-Abitur 2008

Fachbrief 6 vom 19.01.2007

- Auswertung des Probeabiturs
- Hinweise zum Zentralabitur 2007 und 2008
- Musterlösung einer Abituraufgabe
- Taschenrechner im Abitur, Geräteliste
- PISA Längsschnittuntersuchung 2003-2004