

18.07.2016

Fachbrief Nr. 19 Mathematik

- 1.
Zum neuen Rahmenlehrplan**
- 2.
Online-Version der RLP**
- 3.
Übergangsregelungen**
- 4.
Wahlthemen**

Ihr Ansprechpartner in der Senatsverwaltung für Bildung, Wissenschaft und Forschung:
Ralf Punkenburg, ralf.punkenburg@senbwf.berlin.de

Ihre Ansprechpartner im LISUM Berlin-Brandenburg:
Ines Fröhlich, ines.froehlich@lisum.berlin-brandenburg.de

Sehr geehrte Kolleginnen und Kollegen,

dieser Fachbrief enthält detaillierte Hinweise zum neuen Rahmenlehrplan für die Jahrgangsstufen 1-10, der ab dem Schuljahr 2017/18 unterrichtswirksam wird. Sie finden Erläuterungen zu den Übergangsregelungen, zum Online-Rahmenlehrplan und ausführliche Angaben zu den möglichen Wahlthemen. Im kommenden Schuljahr werden Sie mit Hilfe dieser Informationen in Ihrem Fachbereich die Umsetzung des neuen Rahmenlehrplans vorbereiten können. Ich danke Frau Kerstin Mahr für die Mitarbeit an den Erläuterungen zum neuen Rahmenlehrplan.

Zu Beginn des neuen Schuljahres wird ein weiterer Fachbrief erscheinen mit Hinweisen zu den Prüfungen im kommenden Schuljahr, zu Taschenrechnern, Formelsammlungen und vielen weiteren aktuellen Details.

Ich bitte die Schulleitungen und die Fachverantwortlichen, den Fachbrief allen Fachlehrkräften zur Verfügung zu stellen. Neben dem Versand der Papierfassung an die Schulen werden die Fachbriefe auf dem Bildungsserver Berlin-Brandenburg unter <http://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/unterricht/fachbriefe-bln.html> veröffentlicht. Wie dort ersichtlich, können sich Interessierte bei neuen Fachbriefen auch per E-Mail unterrichten lassen.

Inhalte dieses Fachbriefs:

- | | |
|--|------|
| 1. Der neue Rahmlehrplan Mathematik für die Jahrgangsstufen 1-10 | S. 3 |
| 2. Die Online-Version des neuen Rahmenlehrplans | S. 6 |
| 3. Übergangsregelungen | S. 6 |
| 4. Wahlthemen | S. 9 |

1. Der neue Rahmenlehrplan Mathematik für die Jahrgangsstufen 1 bis 10

1.1 Vorgaben für die Entwicklung des neuen Rahmenlehrplans

Fachliche Vorgabe bei der Entwicklung des neuen Rahmenlehrplans war, Folgendes zu berücksichtigen:

- die vier bisherigen Rahmenlehrpläne (Grundschule Berlin – Brandenburg, Förderschwerpunkt Lernen, Sekundarstufe I Berlin und Sekundarstufe I Brandenburg),
- die Bildungsstandards der KMK (Förderschwerpunkt Lernen, Primarstufe, Hauptschulabschluss, mittlerer Schulabschluss) und das inzwischen bewährte Kompetenzmodell,
- die gemeinsamen Eingangsvoraussetzungen für die Qualifikationsphase in Berlin und Brandenburg,
- eine fächerübergreifende und fächerverbindende Kompetenzentwicklung (insbesondere anhand der übergreifenden Themen im Teil B des neuen Rahmenlehrplans).

Weiterhin sollte der Rahmenlehrplan inhaltlich entschlackt werden, obwohl durch die Zusammenfassung der Rahmenlehrpläne der Sekundarstufe I von Berlin und Brandenburg einige neue Inhalte aufgenommen werden mussten.

1.2 Aufbau des neuen Rahmenlehrplans

Für jedes Fach gliedert sich der Fachteil des neuen Rahmenlehrplans in die Unterkapitel Kompetenzentwicklung im Fach (C1), Kompetenzen und Standards (C2) und Themen und Inhalte (C3). Der Kompetenzerwerb wird durch Standards in Niveaustufen von A bis H dargestellt.

Im Kapitel C1 wird das Kompetenzmodell der Mathematik beschrieben. Es weicht von den bisherigen Kompetenzmodellen leicht ab, da diese in der Grundschule und der Sekundarstufe I verschieden waren. Die Bezeichnungen der fünf Leitideen wurden so angepasst, dass sie zu allen Jahrgangsstufen passen.

Im Kapitel C2 werden die zu erwerbenden Kompetenzen zu jeder Leitidee beschrieben, die durch Standards auf acht Niveaustufen konkretisiert werden. Bei den Standards handelt es sich um Regelstandards; durch die Niveaustufen werden für das jeweilige Fach die bildungsgangbezogenen Anforderungen an die Schülerinnen und Schüler beschrieben. Die Standards stellen dar, welche Voraussetzungen die Lernenden im Mittel in den Jahrgangsstufen 1 bis 10 erfüllen müssen, um Übergänge erfolgreich zu bewältigen bzw. das Abschlussniveau im Fach Mathematik zu erreichen. Eine Übersicht der Zuordnung der Niveaustufen zu Jahrgangsstufen ist zu Beginn des Kapitels C2 dargestellt.

In jedem Kompetenzbereich ist eine Progression der Standards von Stufe A zu Stufe H beschrieben. Eine Kompetenzentwicklung auf einer höheren Niveaustufe basiert auf den erreichten Kompetenzen aller vorhergehenden Niveaustufen, daher eignen sich die Standards sowohl als Basis für die Feststellung des Lern- und Leistungsstands als auch für die darauf aufbauende individuelle Förderung und Lernberatung durch differenzierende Aufgaben. Jedoch werden nur die inhaltsbezogenen Kompetenzen für einzelne Niveaustufen durch Standards konkretisiert, denn eine Konkretisierung in Bezug auf prozessbezogene Kompetenzen ist abhängig von den Themen und Inhalten des Unterrichts.

In Kapitel C3 werden die Themen und Inhalte konkretisiert. Neu für die Berliner Lehrerinnen und Lehrer der Sekundarstufe I ist, dass diese nicht mehr nach einzelnen Themengebieten sondern nach Leitideen geordnet sind. Die Lehrkräfte der Grundschule und der Sekundarstufe I in Brandenburg kennen diese Anordnung bereits aus ihren bisherigen Rahmenlehrplänen. Die Struktur ist hierbei die gleiche wie im Kapitel C2, sodass jeder einzelne Standard durch die Angabe von konkreten Inhalten detailliert beschrieben wird.

1.3 Unterrichtsplanung auf der Grundlage des neuen Rahmenlehrplans

Für die Planung von konkreten Unterrichtsvorhaben und der Auswahl von Aufgaben für den Unterricht bietet das Kompetenzmodell die Möglichkeit, den Aufgaben inhaltliche Kompetenzen, allgemeine mathematische Kompetenzen und Anforderungsbereiche zuzuordnen. So lassen sich Aufgaben unterschiedlicher Komplexität erzeugen. Unter Berücksichtigung unterschiedlicher Anforderungsbereiche kann beispielsweise der Inhalt „Verwenden den Satz von Pythagoras ...“ in Hinblick auf die prozessbezogene Kompetenz „Mathematisch argumentieren“ konkretisiert werden:

- Anforderungsbereich I: Die Schülerinnen und Schüler begründen, dass der Satz von Pythagoras in der vorliegenden Aufgaben angewendet werden darf.
- Anforderungsbereich II: Die Schülerinnen und Schüler überprüfen an einem vorgegebenen Beispiel die Korrektheit des Satzes von Pythagoras, indem sie Einheitsquadrate auszählen.
- Anforderungsbereich III: Die Schülerinnen und Schüler entwickeln schlüssige mehrschrittige Argumentationen, um den Satz von Pythagoras zu beweisen.

Zur Veranschaulichung der Konkretisierung eines Inhalts in Bezug auf eine prozessbezogene Kompetenz werden in der Online-Fassung des neuen Rahmenlehrplans standardillustrierende Aufgaben zur Verfügung gestellt, die gleichzeitig die Progression innerhalb der Leitidee verdeutlichen. Diese Aufgaben bieten Anregungen für die Konzeption von Lernumgebung, die die Heterogenität innerhalb einer Lerngruppe angemessen berücksichtigen.

1.4 Chancen und Herausforderungen durch den neuen Rahmenlehrplan

Im Fach Mathematik gibt es für alle Bildungsgänge zentrale Abschlussprüfungen, die auf Grundlage von abschlussorientierten Standards konzipiert werden. Im Rahmenlehrplan werden die Standards für den berufsorientierenden Schulabschluss (BOA) durch die Niveaustufe E, für die Berufsbildungsreife (BBR) auf Stufe F und für den MSA auf Stufe G beschrieben. In Abhängigkeit vom Bildungsgang und der Zusammensetzung der Schülerschaft kann die zeitliche Entwicklung des Kompetenzerwerbs verschieden sein. Der neue Rahmenlehrplan stärkt die Bedeutung eines schulinternen Curriculums und ermöglicht es damit den Schulen, gezielt schulspezifische Voraussetzungen, Bedingungen und Schwerpunktsetzungen zu berücksichtigen. Bei der Konzeption eines schulinternen Curriculums im Fach Mathematik ist Folgendes zu berücksichtigen.

- „Die Standards der Niveaustufen E und F sowie G und H sind innerhalb der Doppeljahrgangsstufen 7/8 sowie 9/10 geeignet miteinander zu verzahnen.“ (RLP, Teil C Mathematik, S. 14)
- „Insbesondere an Gymnasien können durch geeignete inhaltliche Verknüpfungen in der Jahrgangsstufe 8 Vorgriffe auf die in G bzw. H beschriebenen Standards erfolgen.“ (RLP, Teil C Mathematik, S. 14)
- „Zur Herausbildung einer mathematischen Allgemeinbildung ist es unerlässlich, die Verbindungen und Bezüge der verschiedenen mathematischen Inhalte untereinander aufzuzeigen. Dies sollte nicht nur aus innermathematischer Sicht erfolgen, sondern insbesondere auch durch die Anwendung von mathematischen Methoden in Wissenschaft und Gesellschaft. Die Inhalte der einzelnen Tabellenfelder zu jeder Leitidee sollen deshalb nicht nebeneinander, sondern stets in sinnvoller Verknüpfung – auch über mehrere Leitideen hinweg – unterrichtet werden.“ (RLP, Teil C Mathematik, S. 32)
- „Der Kompetenzerwerb erfolgt in einem permanenten Zusammenspiel von prozess- und inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen unter Berücksichtigung der drei verschiedenen Anforderungsbereiche. Die Inhalte sind dabei immer im Kontext prozessbezogener mathematischer Kompetenzen zu sehen. Dabei spielen auch die Vorgaben aus den Basiscurricula zur Sprach- und Medienbildung eine wichtige Rolle. Solche Beziehungen sowie die Vereinbarungen bezüglich der Verwendung der Fachsprache sollten im schulinternen Curriculum sichtbar werden.“ (RLP, Teil C Mathematik, S. 32)

Im Folgenden werden einige Beispiele für Themen von Unterrichtssequenzen gegeben, in denen die Standards und Inhalte aus verschiedenen Niveaustufen und verschiedenen Leitideen miteinander verknüpft werden.

- In einer Unterrichtssequenz zum Thema „Statistik“ am Anfang der 7. Jahrgangsstufe kann anhand des Inhalts „Darstellen von Daten (auch prozentuale Angaben) in Diagrammen (auch Kreisdiagramme)“ die Kompetenzentwicklung der Schülerinnen und Schüler zu allen Standards der Leitidee Zahlen und Operationen im Bereich gebrochene Zahlen (Niveaustufe D) gefördert werden. Zusätzlich können die Zahlvorstellungen zu gebrochenen Zahlen durch die Darstellungsform Prozente erweitert werden (Inhalt im Themenbereich Zahlen und Operationen, Niveaustufe E).
- Der Inhalt „Beschreiben und Reflektieren eines Verfahrens zur Einschachtelung von Quadratwurzeln oder π “ (Themenbereich Zahlen und Operationen, Kompetenzbereich Zahlvorstellungen – Zahlen ordnen, Niveaustufe H) ist am Gymnasium sinnvollerweise innerhalb der Unterrichtssequenzen „reelle Zahlen“ bzw. „Kreise“ in den Jahrgangsstufen 8 bzw. 9 zu unterrichten.
- Wenn man die Niveaustufen E und F in Doppeljahrgängen denkt, ist es in allen Schularten sinnvoll, die Unterrichtssequenz „Pythagoras“ in Jahrgang 8 und nicht in Jahrgang 7 zu unterrichten. In der Unterrichtssequenz „Pythagoras“ werden die Inhalte „Verwenden des Satzes von Pythagoras zur Berechnung von Streckenlängen in rechtwinkligen Dreiecken“ und „Verwenden der Umkehrung des Satzes von Pythagoras zur Identifizierung von rechtwinkligen Dreiecken“ (Themenbereich Größen und Messen, Kompetenzbereich Rechnen mit Größen – Größen in Sachzusammenhängen berechnen, Niveaustufe E) mit dem Inhalt „Beschreiben von Quadratwurzel [...] als Umkehrung der Potenzschreibweise“ (Themenbereich Zahlen und Operationen, Kompetenzbereich Operationsvorstellungen und Rechenstrategien – Operationsvorstellungen entwickeln, Niveaustufe F) verknüpft.
- Der Inhalt „Darstellen von Zuordnungen und Funktionen (auch quadratische, trigonometrische und Exponentialfunktionen) im Koordinatensystem [...]“ (Themenbereich Gleichungen und Funktionen, Kompetenzbereich Zuordnungen und Funktionen – Zuordnungen und Funktionen darstellen, Niveaustufe G) ist am Gymnasium und in Kursen auf dem Erweiterungsniveau auf verschiedene Unterrichtssequenzen und Jahrgangsstufen zu verteilen. Die Unterrichtssequenz „Quadratische Funktionen“ wird sinnvollerweise vor den Unterrichtssequenzen „trigonometrische Funktionen“ und „Exponentialfunktionen“ unterrichtet und damit bereits in Jahrgangsstufe 9.

Durch die Verzahnung von unterschiedlichen Niveaustufen und Leitideen innerhalb von Unterrichtssequenzen werden diese inhaltlich miteinander verknüpft. Innerhalb des Themas einer Unterrichtssequenz, das durch die Vereinbarungen im schulinternen Curriculum vorgegeben ist, ergeben sich für jede Lehrkraft vielfältige Möglichkeiten, Lernumgebungen zu gestalten, die die Heterogenität der Lernvoraussetzungen und des Lerntempos berücksichtigen. Dies geschieht auf Grundlage des Kompetenzmodells der Mathematik durch die Wahl unterschiedlicher Anforderungsbereiche und die Bezugnahme auf unterschiedliche prozessbezogene Kompetenzbereiche.

2. Die Online-Version des neuen Rahmenlehrplans

Das Portal Rahmenlehrplan-Online (www.bildungsserver.berlin-brandenburg.de/rlp-online) stellt ein erweitertes Angebot zum Rahmenlehrplan für die Jahrgangsstufen 1 bis 10 dar. Das Portal ermöglicht allen Lehrkräften in Berlin und Brandenburg einen einfachen Zugang zum Rahmenlehrplan und ergänzenden didaktischen Materialien sowie standardillustrierenden Aufgaben. Diese Aufgaben sowie Lernaufgaben, die im kommenden Schuljahr zur Verfügung gestellt werden, sind in im OER-Format (Open Educational Resources) verfasst. Das bedeutet, alle Nutzer können diese Angebote im Unterricht einsetzen und sie auch verändern, ohne urheberrechtliche Einschränkungen berücksichtigen zu müssen.

Die Seiten zum Fach Mathematik erlauben über die Menüleiste den schnellen Zugriff auf die einzelnen Kapitel des Fachteils Mathematik. Die Darstellung des Rahmenlehrplans ist mit einer Filter- bzw. Suchfunktion ausgestattet, Querverweise innerhalb der Dokumente zeigen zugleich die Vernetzung zwischen den Fächern und den fachübergreifenden Kompetenzbereichen. Im Bereich Materialien werden Verweise und Dokumente bereitgestellt, durch die die Lehrkräfte bei der Umsetzung des Rahmenlehrplans unterstützt werden.

Bis zur Unterrichtswirksamkeit des Rahmenlehrplans ab dem Schuljahr 2017/2018 und darüber hinaus werden vielfältige Unterstützungsangebote im Portal „RLP-online“ veröffentlicht.

3. Übergangsregelungen

Ein Rundschreiben mit den Übergangsregelungen für alle Fächer ist bereits im März an alle Schulen verschickt worden. Wir geben hier einige weitere Hinweise für das Fach Mathematik.

Die Übergangsregelungen für das Fach Mathematik berücksichtigen, dass einige wenige Themen und Inhalte, die nach dem alten Plan bestimmten Doppeljahrgangsstufen (5/6, 7/8, 9/10) zugewiesen waren, nun Niveaustufen zugeordnet sind, die u. U. zeitlich früher erreicht werden sollen.

In den Tabellen sind für jede Niveaustufe die Themen und Inhalte ausgewiesen, die nach neuem Rahmenlehrplan jeweils für das aktuelle Niveau vorausgesetzt werden, aber u. U. im vorangegangenen Unterricht noch nicht bearbeitet wurden. Die zugehörige Leitidee ist angegeben. Der Rückwärtspfeil (\leftarrow) zeigt auf die Niveaustufe, der die Themen und Inhalte nach dem neuen Rahmenlehrplan zugewiesen sind. Im Abgleich mit dem bisherigen schulischen Fachcurriculum sind für die genannten Themen und Inhalte verbindliche Festlegungen zu treffen. Für die Niveaustufen A bis C sind keine Übergangsregelungen erforderlich.

In der unterrichtlichen Praxis werden vermutlich keine bedeutenden Konsequenzen daraus erwachsen, denn es sind in den meisten Fällen lediglich einführende oder vorbereitende Inhalte betroffen. Da diese fachlich in einem engen Zusammenhang zum aktuellen Unterrichtsinhalt stehen, kann dies bei der Unterrichtsplanung weitgehend problemlos berücksichtigt werden.

Niveau- stufe	Schülerinnen und Schüler, die im Schuljahr 2017/2018 erstmals auf dem Niveau D unterrichtet werden	
D	Diese Schülerinnen und Schüler wurden nach dem alten Plan unterrichtet. Was ist nach dem neuen Plan vor diesem Niveau Unterrichtsgegenstand?	
	<i>C</i> ← L 1	Nennen und Erkennen von Quadratzahlen
	<i>C</i> ← L 3	Beschreiben der Beziehungen zwischen den Vierecken (Haus der Vierecke)

Niveau- stufe	Schülerinnen und Schüler, die im Schuljahr 2017/2018 erstmals auf dem Niveau E unterrichtet werden	
E	Diese Schülerinnen und Schüler wurden nach dem alten Plan unterrichtet. Was ist nach dem neuen Plan vor diesem Niveau Unterrichtsgegenstand?	
	<i>D</i> ← L 3	Merkmale von Prismen und Herstellen von Modellen von Prismen
	<i>D</i> ← L 4	Rechnen mit dem Dreisatz bei direkt proportionalen Zuordnungen
	<i>C</i> ← L 5	verschiedene Möglichkeiten der Darstellung von Lösungen zu kombinatorischen Fragestellungen (z. B. Anordnung von Bildern, Worten, oder Symbolen in Listen, Tabellen oder vorgegebenen Baumdiagrammen)
	<i>D</i> ← L 5	Begründen der Vollständigkeit einer Lösung bei kombinatorischen Fragestellungen
	<i>D</i> ← L 5	Ermitteln und Vergleichen von Kennwerten (auch Minimum, Maximum und Spannweite)

Niveau- stufe	Schülerinnen und Schüler, die im Schuljahr 2017/2018 erstmals auf dem Niveau F unterrichtet werden	
F	Diese Schülerinnen und Schüler wurden nach dem alten Plan unterrichtet. Was ist nach dem neuen Plan vor diesem Niveau Unterrichtsgegenstand?	
	<i>E</i> ← L 2	Verwenden der Größen Geschwindigkeit und Dichte und ihrer Einheiten Pythagoras und seine Umkehrung
	<i>D</i> ← L 3	Merkmale von Prismen und Herstellen von Modellen von Prismen
	<i>E</i> ← L 3	Eigenschaften (auch Längenverhältnisse) von Ähnlichkeitsabbildungen und deren Anwendung beim Vergrößern und Verkleinern ebener Figuren
	<i>D</i> ← L 4	Rechnen mit dem Dreisatz bei direkt proportionalen Zuordnungen
	<i>C</i> ← L 5	verschiedene Möglichkeiten der Darstellung von Lösungen zu kombinatorischen Fragestellungen (z. B. Anordnung von Bildern, Worten, oder Symbolen in Listen, Tabellen oder vorgegebenen Baumdiagrammen)
	<i>D</i> ← L 5	Begründen der Vollständigkeit einer Lösung bei kombinatorischen Fragestellungen
	<i>D</i> ← L 5	Ermitteln und Vergleichen von Kennwerten (auch Minimum, Maximum und Spannweite)
	<i>E</i> ← L 5	Zusammenhang von relativer Häufigkeit und theoretisch ermittelter Wahrscheinlichkeit

Niveau- stufe	Schülerinnen und Schüler, die im Schuljahr 2017/2018 erstmals auf dem Niveau G unterrichtet werden	
G	Diese Schülerinnen und Schüler wurden nach dem alten Plan unterrichtet. Was ist nach dem neuen Plan vor diesem Niveau Unterrichtsgegenstand?	
	<i>F</i> ← L 1	Zehnerpotenzen zum Darstellen von rationalen Zahlen, Darstellen und umrechnen von Einheiten
	<i>E</i> ← L 2	Pythagoras und seine Umkehrung
	<i>D</i> ← L 3	Verwenden der Größen Geschwindigkeit und Dichte und ihren Einheiten
	<i>E</i> ← L 3	Eigenschaften (auch Längenverhältnisse) von Ähnlichkeitsabbildungen und deren Anwendung beim Vergrößern und Verkleinern ebener Figuren
	<i>D</i> ← L 5	verschiedene Möglichkeiten der Darstellung von Lösungen zu kombinatorischen Fragestellungen (z. B. Anordnung von Bildern, Worten, oder Symbolen in Listen, Tabellen oder vorgegebenen Baumdiagrammen)
	<i>D, E</i> ← L 5	Begründen der Vollständigkeit einer Lösung bei kombinatorischen Fragestellungen
	<i>E</i> ← L 5	Zusammenhang von relativer Häufigkeit und theoretisch ermittelter Wahrscheinlichkeit
	<i>F</i> ← L 5	Darstellen von Daten (auch in Klassen eingeteilt) in Diagrammen (auch Boxplots und auch unter Verwendung der Tabellenkalkulation)

Für das Gymnasium weist der neue Rahmenlehrplan in der Jahrgangsstufe 10 die Standards des Niveaus H aus.

Niveau- stufe	Schülerinnen und Schüler, die am Gymnasium im Schuljahr 2017/2018 erstmals auf dem Niveau H unterrichtet werden	
H	Diese Schülerinnen und Schüler wurden nach dem alten Plan unterrichtet. Was ist nach dem neuen Plan vor diesem Niveau Unterrichtsgegenstand?	
	<i>G</i> ← L 2	Trigonometrische Berechnungen in rechtwinkligen Dreiecken mithilfe von Sinus, Kosinus und Tangens Sinussatz für Längen- und Winkelberechnung ; Kosinussatz für Längenberechnung nutzen Berechnung von Oberflächeninhalt und Volumen gerader Pyramiden, gerader Kegel und Kugeln und zusammengesetzter Körper Systematisierung der bisherigen Kenntnisse über Größen und ihrer Einheiten sowie die Beziehungen zwischen den verschiedenen Größen (auch aus verschiedenen Unterrichtsfächern von Nano bis Tera) unter Einbeziehung der Zehnerpotenzen
	<i>G</i> ← L 4	Entnehmen von Maßen und Lagebeziehungen an Körpern aus verschiedenen Darstellungen (auch aus technischen Zeichnungen, z.B. Zweitafelprojektionen)
	<i>G</i> ← L 5	Merkmale, Darstellungen und Verwendung beim Modellieren von folgenden Funktionstypen: – quadratische Funktionen der Form $y = a(x + d)^2 + e$ – trigonometrische Funktionen der Form $y = a \sin(x)$ – Exponentialfunktionen der Form $y = a b^x$ ($b > 0, x \in \mathbb{N}$) Berechnung von Wahrscheinlichkeiten (mit und ohne Zurücklegen) unter Verwendung kombinatorischer Überlegungen, unter Nutzung von Baumdiagrammen, Pfadregeln Gegenwahrscheinlichkeiten und dem Urnenmodell

4. Wahlthemen

Als Ergänzung zum Abschnitt 3.6 des neuen Rahmenlehrplans erhalten Sie hier ausführliche Beschreibungen zu möglichen Wahlthemen.

Themen des Wahlpflichtunterrichts sollen fachlich bedeutsame Themen bzw. Sachgebiete sein, die sonst im Schulunterricht nicht oder nur am Rande berücksichtigt werden. Es können auch aktuelle wissenschaftliche oder gesellschaftliche Entwicklungen oder Projekte der Schule zum Anlass genommen werden, darauf im Unterricht aus fachlicher Sicht besonders einzugehen. Die Auseinandersetzung mit den Themen soll den Schülerinnen und Schülern in besonderem Maße Gelegenheit geben, prozessbezogene mathematische Kompetenzen weiterzuentwickeln.

Bei der Auswahl und Ausrichtung von Wahlthemen sollte die Interessenlage der Schülerinnen und Schüler besonders berücksichtigt werden. Über das Themenangebot für die verschiedenen Jahrgangsstufen entscheidet die Fachkonferenz.

Die aufgeführten Themen eignen sich nicht nur als Themen für das Wahlpflichtfach, sondern auch als Wahlthemen im Pflichtunterricht. Zur Vermeidung von Dopplungen legt die Fachkonferenz ggf. fest, welche Themen im Wahlpflichtfach angeboten werden, die dann nicht mehr als Wahlthemen zur Ergänzung im Pflichtunterricht zur Verfügung stehen. Weitere Themen auf entsprechendem Niveau sind möglich. Vorgriffe auf Pflichtthemen, auch der gymnasialen Oberstufe, oder Dopplungen sind nicht zulässig.

Folgende inhaltliche Ausrichtungen können unterschieden werden:

- Entwicklung und Anwendung von mathematischen Konzepten in technisch-wissenschaftlichen, ökonomischen oder gesellschaftlichen Kontexten,
- Begründung, Erweiterung oder Verallgemeinerung von mathematischen Strukturen und Modellen.

Die Zuordnung zu einer Jahrgangsstufe muss entsprechend der inhaltlichen Ausrichtung des jeweiligen Themas erfolgen.

1. Geometrische Beziehungen und Symmetrien entdecken und nutzen

Die Betrachtung und Untersuchung von Gestaltungen aus dem Alltag, von Gebäuden, Grafiken, Schriften oder Logos, kann Anlass sein, Symmetrien und weitere geometrische Beziehungen zu entdecken und zu nutzen. Die Schülerinnen und Schüler vertiefen beim Spiegeln, Drehen, Verschieben und Strecken ihre Kenntnisse über die Eigenschaften ebener Figuren.

Mögliche Themen und Inhalte:

- Messen und Zeichnen von Winkeln und Strecken, Konstruieren geometrischer Figuren
- Beschreiben und Begründen von Eigenschaften und Beziehungen geometrischer Objekte
- Herstellen symmetrischer Figuren – auch durch Ausschneiden, Falten, Drehen, Abzählen von Gitterpunkten
- Erarbeiten und Anwenden von Konstruktionsvorschriften für Spiegelungen, Drehungen, Verschiebungen und Streckungen
- Untersuchen von Parkettierungen

2. Kryptologie

Kryptologie ist eine wissenschaftliche Disziplin im Grenzbereich von Mathematik und Informatik, der in der Informationsgesellschaft eine sehr große Bedeutung zukommt. Digitale Daten müssen vor Einsichtnahme und Manipulation geschützt oder durch digitale Signaturen authentifiziert werden. Die dafür verwendeten Verfahren nutzen mathematische Erkenntnisse und können mit mathematischen Methoden beurteilt werden.

Mögliche Themen und Inhalte:

- Untersuchen der gesellschaftliche Relevanz der Thematik
- Prüfwerte
- Einwegcodierung und Hashfunktionen
- Anwenden von einfachen Chiffriermethoden der klassischen Kryptologie (Substitutions- und Transpositionsverfahren)
- Entschlüsseln verschlüsselter Texte ohne Kenntnis der Schlüssel, z. B. mit Hilfe von Häufigkeitstabellen oder Software
- Verfahren der modernen Kryptologie, Grundprinzip der asymmetrischen Verschlüsselung

3. Begründen und Beweisen in der Geometrie

Schülerinnen und Schüler erkunden Beziehungen geometrischer Figuren in Bezug auf Winkel, Streckenlängen und -verhältnisse, Kreise, Schnittpunkte, In- und Umkreise und Tangenten und formulieren Aussagen dazu. Neben den traditionellen Zeichenmaterialien wird dynamische Geometriesoftware eingesetzt. Schülerinnen und Schüler erkunden Invarianzen und finden Begründungen für die entdeckten Beziehungen.

Mögliche Themen und Inhalte:

- Erkunden und Begründen von Umfangswinkelsatz, Mittelpunktswinkelsatz und Außenwinkelsatz
- Aussagen über die Umkehrbarkeit der Winkelsätze an geschnittenen Parallelen
- Konstruktion von Inkreis- und Umkreismittelpunkt eines Dreiecks und der Tangenten an einen Kreis
- Untersuchen der Mittelparallelle und der Seitenhalbierenden eines Dreiecks („Schwerpunkt“)
- Ermitteln der Winkelsumme im n-Eck
- Eulersche Gerade, Satz von Napoleon

4. Zählen und Rechnen in historischer Entwicklung

Die Beschäftigung mit historischen oder (für Schülerinnen und Schüler) unüblichen Zahldarstellungen und Rechenverfahren führt zu einem vertieften Verständnis für die gebräuchlichen Rechenverfahren und die Systematik des Dezimalsystems.

Mögliche Themen und Inhalte:

- Darstellen von Zahlen in verschiedenen Systemen
- Beschreiben von Verfahrensweisen bei der Zahldarstellung und der Durchführung von Rechnungen
- Beschreiben von Funktionsweisen der Rechenhilfsmittel
- Ausführen von Lösungsverfahren
- Einsetzen von Rechenhilfsmitteln
- Einsatz und Prinzip historischer Rechenhilfsmittel (Rechenbrett, Abakus, Proportionalzirkel, mechanische Rechenmaschinen nach dem Zählradprinzip, Rechenstab, Zahlentafeln)

5. Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck

Neben dem Satz des Pythagoras können die Kathetensätze und der Höhensatz zur Lösung von inner- und außermathematischen Problemen genutzt werden. Historische Bezüge (Flächenverwandlungen) und Beweisvariationen rund um den Satz des Pythagoras können zu einer vertieften Einsicht der Flächensätze führen. Im Mittelpunkt des Themenfeldes stehen innermathematische Probleme, die Schülerinnen und Schüler mit den Flächensätzen lösen.

Mögliche Themen und Inhalte:

- algebraische und geometrische Beweise zur Satzgruppe des Pythagoras
- Flächenumwandlungen mit Hilfe des Höhen- oder des Kathetensatzes
- Anwenden der Kathetensätze, des Höhensatzes und des Satz des Pythagoras

6. Zahlentheorie

Wegen ihrer Anwendung in der modernen Kryptographie hat die Zahlentheorie außerordentlich an Bedeutung gewonnen. In der Schule kann die Beschäftigung mit zahlentheoretischen Fragestellungen zudem das Zahlverständnis und viele weitere Kenntnisse vertiefen. Häufig ist ein Bezug zu praktischen Anwendungen möglich.

Mögliche Themen und Inhalte:

- Quadratzahlen
- Teilbarkeitsregeln
- Division mit Rest, Restklassen, Anwendungen davon, z.B. Prüfwziffern
- ggT und kgV, Euklidischer Algorithmus
- Primzahlen, Primfaktorenzerlegung, Primzahlentests
- Vollkommene Zahlen, Mersenne-Zahlen
- Grundlegende Sätze der Zahlentheorie

7. Numerische Verfahren und Rechenhilfsmittel

Leistungsfähige, aber dennoch relativ einfach zu bedienende Rechenhilfsmittel stehen heutzutage nahezu ohne Einschränkungen zur Verfügung. Damit können auch in der Schule numerische Verfahren ohne großen technischen Aufwand oder Einarbeitung verwendet werden. Vorzugsweise sollten einfache Hilfsmittel (z. B. Taschenrechner und Tabellenkalkulationssoftware) verwendet werden, damit numerische Verfahren nachvollziehbar bleiben.

Mögliche Themen und Inhalte:

- Sinnvolles Runden und sinnvolles Rechnen mit gerundeten Werten
- Rechnen mit fehlerbehafteten Größen
- Anwenden von grafischen Darstellungen, z. B. zum Lösen von Gleichungen, z. B. $x = \cos x$
- Experimentelles Ermitteln von optimalen Werten, z. B. von Ausgleichsgeraden
- Rekursive Verfahren, z. B. Nullstellenbestimmung durch Intervallhalbierung
- numerische Flächenbestimmung (Trapezverfahren)
- Interpolation
- Algorithmische Verfahren zur Bestimmung von Wurzeln (Heron-Verfahren), Potenzen, trigonometrischen Werten etc.

8. Anwendungen der Trigonometrie

Seit Jahrtausenden werden trigonometrische Berechnungen bei Landvermessung, Navigation und in der Astronomie verwendet. Daraus ergeben sich vielfältige Anknüpfungspunkte und Beispiele für den Unterricht.

Mögliche Themen und Inhalte:

- Historische Verfahren in der Landvermessung
- Triangulation
- Vorwärts-/Rückwärtseinschneiden
- Astronomische Berechnungen

9. Diskrete Strukturen, optimale Wege

Für diskrete Strukturen gibt es vielfältige Beispiele im Alltag: Liniennetzpläne der öffentlichen Verkehrsmittel, Straßenkarten, Freundschaftsdiagramme oder Telefonnetzwerke. Die Schülerinnen und Schüler erkennen solche Strukturen in ihrer Umwelt und modellieren diese mit Hilfe von Graphen.

Zu realen Anwendungssituationen, z. B. der Planung eines Telefonnetzes oder einer Wegeoptimierung, können Algorithmen entwickelt und untersucht werden.

Mögliche Themen und Inhalte:

- Modellieren mit Graphen, Interpretieren von Graphen als Realsituationen
- Verwenden von Matrizen zur symbolischen Darstellung von Graphen, Eigenschaften von Graphen
- Entwickeln, Diskutieren und Präsentieren von Modellierungsansätzen
- Formulieren und Formalisieren von Algorithmen
- Verwenden spezieller Graphen, z. B. Bäume
- Vorgehensweisen zum Auffinden optimaler Wege
- Finden und Anwenden von Graphenalgorithmen (z. B. Algorithmus von Kruskal)

10. Lineare Optimierung

Die Behandlung linearer Optimierungsprobleme eröffnet vielfältige Möglichkeiten. Die Probleme sind leicht verständlich und die Lösungsmethoden vielfältig. Der methodisch geschickte Einsatz von Computer-Algebra-Systemen kann die Selbstständigkeit der Schülerinnen und Schüler erhöhen.

Mögliche Themen und Inhalte:

- Umwandeln kontextbezogener Aufgabenstellungen in (Un-) Gleichungssysteme
- Zielfunktionen und Nebenbedingungen ermitteln
- graphisches Lösen von Gleichungs- und Ungleichungssystemen
- Lösungsmengen linearer Ungleichungen und linearer Ungleichungssysteme

11. Wachstumsprozesse

Schülerinnen und Schüler erkunden neben dem linearen und exponentiellen Wachstum auch beschränktes und logistisches Wachstum. Sie beschreiben es durch rekursive Darstellungen und modellieren in vielfältigen Kontexten Wachstums- und Schrumpfungsprozesse. Der Einsatz von Tabellenkalkulation wird zur Darstellung von Iterationsprozessen empfohlen.

Mögliche Themen und Inhalte:

- Beschreiben, Interpretieren und Darstellen von funktionalen Zusammenhängen bei Wachstums- und Schrumpfungsprozessen
- Anwenden von rekursiven Darstellungen bei der Beschreibung und Bearbeitung von Sachzusammenhängen
- Modellieren von Realsituationen mit Wachstumsmodellen

12. Körper und Figuren darstellen und berechnen

Der handelnde Umgang mit ebenen und räumlichen Figuren vertieft das Raumvorstellungsvermögen. Bei geometrischen Konstruktionen üben die Schülerinnen und Schüler das maßgenaue Zeichnen. Das praktische Arbeiten vertieft das Verständnis für die Strukturen geometrischer Darstellungen wie Perspektiven und Projektionen. Dadurch erlangen die Lernenden ein größeres Verständnis für Maßgenauigkeiten und für technische Zeichnungen wie z. B. Bauanleitungen. Bei der Planung zum Bau von Körpermodellen vertiefen die Schülerinnen und Schüler ihre Vorstellungen über den Aufbau der Körper und über räumliche Lagebeziehungen.

Mögliche Themen und Inhalte:

- Ausführen geometrische Grundkonstruktionen
- Ermitteln von Flächeninhalte durch Zerlegungen und Ergänzung
- Herstellen von Kantenmodellen und Körpern, auch mit Hilfe von Abwicklungen
- Konstruieren und Vergleichen räumlicher Darstellungen
- Nutzen von gebräuchlichen technischen Darstellungen

13. Kugeln und Kreise

Durch die Beschäftigung mit Volumen und Oberfläche der Kugel vertiefen die Schülerinnen und Schüler ihre Vorstellung von Näherungsverfahren. Es können zahlreiche Sachbezüge zur Kugel, zu Kugelteilen und zu mit Kugeln zusammengesetzten Körpern hergestellt werden, so dass Sachprobleme auf unterschiedlichen Niveaustufen bearbeitet werden können.

Mögliche Themen im Unterricht:

- Kreise, Segmente, Abschnitte und Tangenten
- Berechnen des Flächeninhalts von Kreisen, Kreisausschnitten und -abschnitten
- Experimentelles Ermitteln von Näherungen für das Kugelvolumen
- Anwenden von Näherungsverfahren zur Ermittlung von Kugelvolumen und Kugeloberfläche
- Herleiten der Formeln für Kugelvolumen und Kugeloberfläche durch Vergleich bzw. Zerlegung
- Berechnungen in Sachzusammenhängen, auch für Kugelausschnitt und Kugelabschnitt.

14. Platonische Körper und weitere regelmäßige konvexe Polyeder

Platonische Körper nehmen als spezielle Polyeder eine besondere Rolle ein. Schülerinnen und Schüler vertiefen ihr Raumvorstellungsvermögen durch den Bau und die Darstellung unterschiedlicher Platonischer Körper. Mit Hilfe von Systematisierungen und ihren Kenntnissen über Symmetrien erschließen sich die Schülerinnen und Schüler die besonderen Eigenschaften dieser Körper.

Durch die Betrachtung und Untersuchung weiterer konvexer Polyeder (archimedische Körper, catalanische Körper, Johnson-Körper) kann das Themengebiet erweitert werden.

Mögliche Themen und Inhalte:

- Eigenschaften von regelmäßigen Polyedern, besonderen Eigenschaften der Platonischen Körper
- Symmetrien, Dualität
- Abwicklungen, Schrägbilder, Schlegeldiagramme
- kulturhistorische Bezüge der regulären Polyeder
- Erzeugung Archimedischer Körper aus Platonischen Körpern
- Eulerscher Polyedersatz

15. Beweistechniken und Vollständige Induktion

Argumentieren, Begründen und Beweisen betreffen zentrale Kompetenzbereiche des Mathematikunterrichts, eine Vertiefung des für die Mathematik spezifischen formal-deduktiven Schließens ist jedoch in allen mathematischen Themengebieten möglich. Klassische Beweise können nachvollzogen und untersucht werden, es gibt jedoch auch vielfältige Beweisaufgaben, z. B. aus Mathematik-Wettbewerben.

Mit der vollständigen Induktion lernen die Schüler ein weiteres Beweisverfahren kennen.

Mögliche Themen und Inhalte:

- Abgrenzung zwischen Begründen und Beweisen
- klassische Beweistechniken (direkter Beweis, Widerspruchsbeweis, Kontraposition)
- Beweise in der Geometrie
- Vollständige Induktion (Folgen, Summen, Ungleichungen, Teilbarkeit)

16. Mathematische Logik

Die mathematische Logik hat neben ihren grundlegenden mathematischen Aspekten eine konkrete praktische Bedeutung in der Informatik. Diese beiden Gesichtspunkte bieten die Möglichkeit für eine spannende und abwechslungsreiche Gestaltung des Unterrichts.

Mögliche Themen und Inhalte:

- Aussagen und Nicht-Aussagen
- logische Operation und Verknüpfungen
- deMorgan-Regeln
- Quantoren, Prädikatenlogik
- Logische Schaltglieder (Gatter) und Schaltnetze
- Karnaugh-Veitch-Diagramme